

„Bafög“-
Ausgabe

et
elektrotechnik



Martin Horn
Nicolaos Dourdoumas

Regelungstechnik

Rechnerunterstützter Entwurf
zeitkontinuierlicher und
zeitdiskreter Regelkreise

Teil 1

Grundlagen

Kapitelübersicht

1	Systeme und deren Beschreibung	13
2	Lösung der Systemgleichungen	33
3	Übertragungsfunktion	49
4	Diagonalform eines Systems	65
5	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	77
6	Stabilität	85
7	Zeitdiskrete, lineare und zeitinvariante Systeme	115

Kapitel

3

Übertragungsfunktion

3.1 Einführung

Das Konzept der *Übertragungsfunktion* erlaubt eine prägnante Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Eingangs- und der Ausgangsgröße eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems. Dieses Konzept spielt eine fundamentale Rolle in der Systemtheorie und beim Regelkreisentwurf. Wir benutzen zur Einführung dieses Begriffes eine *Integraltransformation* (die *Laplace-Transformation*) und beschreiben die Verhältnisse im so genannten Bildbereich, auch Frequenzbereich genannt, der komplexen Variablen s .

Wir gehen davon aus, dass das Modell eines linearen zeitinvarianten Systems in der üblichen Zustandsform vorliegt:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{b}u \quad y = \mathbf{c}^T x + du.$$

Wir nehmen an, dass der Anfangszustand \mathbf{x}_0 zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ gleich null ist $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Die Anwendung der *Laplace-Transformation* nach (2.25) auf obige Relationen ergibt unter Beachtung von (2.26) und (2.27) unmittelbar

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}u(s) \quad \text{und} \quad y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(s) + du(s).$$

Das Ziel ist, eine Beziehung zwischen $y(s)$ und $u(s)$ zu ermitteln. Nach Sortieren der Beiträge in der ersten Gleichung

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{b}u(s)$$

kann nach $\mathbf{x}(s)$ aufgelöst werden:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}u(s). \quad (3.1)$$

Durch Einsetzen von (3.1) in die transformierte Ausgangsgleichung ergibt sich folgende *algebraische* Beziehung zwischen y und u im Bildbereich:

$$y(s) = [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] u(s). \quad (3.2)$$

Man erkennt deutlich, dass *unabhängig* von der Wahl der Eingangsgröße $u(t)$ das Verhältnis „Ausgangs- zu Eingangsgröße“ im Bildbereich (!), nämlich $y(s)/u(s)$, immer dasselbe ist.¹ Dieses Verhältnis nennt man die *Übertragungsfunktion* $G(s)$ des betrachteten Systems:

$$G(s) := \frac{y(s)}{u(s)} \Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d. \quad (3.3)$$

¹ Dies ist im Zeitbereich nur für bestimmte Eingangsfunktionen $Ue^{\xi t}$, so genannte *Eigenfunktionen*, gegeben!

Mit Hilfe obiger Beziehung kann man bei vorliegender Zustandsbeschreibung $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d]$ die zugehörige Übertragungsfunktion berechnen. Wesentlich ist, dass die Übertragungsfunktion eines Systems eine *Invariante* ist. Das bedeutet, sie ändert sich nicht durch eine (konstante) reguläre Zustandstransformation! Dieser Umstand erleichtert die rechnerische Ermittlung der Übertragungsfunktion.

Die Übertragungsfunktion kann mit Hilfe der *Laplace-Transformierten* der Gewichtsfunktion

$$g(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b}$$

ermittelt werden. Es gilt offensichtlich

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

und damit erhalten wir:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} + d. \quad (3.4)$$

Wir halten fest: Die Linearität und die Zeitinvarianz des mathematischen Modells stellen eine essentielle Voraussetzung für die Verwendung der *Laplace-Transformation* dar. Sie ermöglichen die *einfache* Transformation in den Bildbereich und einfach strukturierte Konzepte und Ergebnisse!

3.2 Ermittlung der Systemantwort

Das eingeführte Konzept kann natürlich benutzt werden, um die Antwort $y(t)$ eines Systems mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ auf eine vorgegebene Eingangsfunktion $u(t)$ *explizit* zu berechnen.

Prinzipiell ist der Weg hierfür folgender: Man unterwirft zunächst die Eingangsfunktion $u(t)$ der *Laplace-Transformation* und berechnet die zugehörige Transformierte $u(s)$. Anschließend wird das Produkt $y(s) = G(s)u(s)$ in eine *Summe* von „elementaren“ Beiträgen zerlegt. Hierbei achtet man darauf, dass Ausdrücke entstehen, deren Rücktransformation in den Zeitbereich, z.B. mit Hilfe von Tabellen, einfach ist. Dieses Vorgehen läuft in den meisten praktischen Fällen auf die *Partialbruchzerlegung* einer gebrochenen rationalen Funktion in s hinaus.

Es soll an dieser Stelle festgehalten werden, dass durch eine leichte Modifikation der erzielten Ergebnisse der Fall, in dem der Anfangszustand nichttrivial ist, also $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ gilt, einfach zu behandeln ist. Man braucht nur zu beachten, dass der Differentialquotient dx/dt aufgrund der Differentiationsregel die *Laplace-Transformierte* $s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0$ besitzt. Damit ergibt sich unmittelbar in Analogie zu obiger Eingangs-Ausgangs-Relation (3.2) die allgemeine Beziehung

$$y(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + G(s)u(s). \quad (3.5)$$

Wie erwartet, erhalten wir aufgrund der Linearität des Systems einen zusätzlichen additiven Beitrag, der den Einfluss des Anfangszustandes berücksichtigt.

3.3 Struktur der Übertragungsfunktion

Wir wollen nun die Struktur der Übertragungsfunktion nach (3.3) durchleuchten. Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine gebrochen rationale Funktion der komplexen Variablen s . Diese kann als Quotient zweier Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ dargestellt werden:

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}. \quad (3.6)$$

Diesen Umstand erkennt man anhand des Bildungsgesetzes der so genannten *Resolventen*

$$\mathcal{A} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}.$$

\mathcal{A} ist eine (quadratische) (n, n) -Matrix, deren Elemente gebrochen rationale Funktionen in s sind. Die Elemente sind also Quotienten von Polynomen, wobei deren Zählergrad prinzipiell kleiner als die Ordnung des Systems n ist. Der kleinste gemeinsame Nenner aller auftretenden Nennerpolynome ist das charakteristische Polynom $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Bei der Anwendung der Definitionsgleichung (3.3) ergibt sich die Übertragungsfunktion $G(s)$ *zunächst* als Quotient zweier Polynome in s :

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})},$$

wobei das Bildungsgesetz für das Zählerpolynom $\theta(s)$ im Moment nicht interessiert. Falls diese Polynome *keine* gemeinsamen Nullstellen haben², so weist $G(s)$ ein Nennerpolynom vom Grad n auf, das identisch mit dem charakteristischen Polynom ist. Anderenfalls heben sich gemeinsame Faktoren heraus, was natürlich zu einer Gradreduktion des Nennerpolynoms und damit der Ordnung der Übertragungsfunktion führt! Dieser formalen Kürzung kommt eine inhaltliche Bedeutung zu, und sie kann vom systemtheoretischen Blickpunkt aus betrachtet mit Hilfe der Begriffe *Steuerbarkeit* bzw. *Beobachtbarkeit* (vgl. hierzu Kap. 5) interpretiert werden!

Mit diesen Erkenntnissen können wir die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \quad (3.7)$$

als Quotient zweier *koprimer* Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ folgendermaßen klassifizieren:

- $d \neq 0$ bedeutet, genau dann besitzen die Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ den gleichen Grad; es gilt

$$\text{Grad } \mu = \text{Grad } \nu \leq n.$$

- $d = 0$ bedeutet, genau dann erfüllen die Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ die Ungleichung

$$\text{Grad } \mu < \text{Grad } \nu \leq n.$$

² Man nennt sie dann „teilerfremd“ oder „koprime“.

3.4 Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion

Das Zähler- bzw. das Nennerpolynom prägen die Übertragungsfunktion und legen das Verhalten des Systems fest. Gewisse relevante Eigenschaften des zeitlichen Verhaltens eines Systems können mit Hilfe der so genannten *Pole* bzw. *Nullstellen* der Übertragungsfunktion $G(s)$ nach (3.7) erklärt werden. Sie werden folgendermaßen definiert:

- Eine (i.A. komplexe) endliche Zahl η nennt man einen Pol von $G(s)$, wenn $\nu(\eta) = 0$, d.h. $1/G(\eta) = 0$ gilt. Falls $\mu(\eta) = 0$, d.h. $G(\eta) = 0$ gilt, so nennt man η eine Nullstelle von $G(s)$.

Unter Heranziehen der Pole α_i und der Nullstellen β_i kann die Übertragungsfunktion in *faktorisierter* Form:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - \beta_i)}{\prod_{i=1}^l (s - \alpha_i)}, \quad \text{mit } m \leq l \leq n \text{ und } K \text{ reell, konstant} \quad (3.8)$$

dargestellt werden. Prinzipiell ist die Anzahl m der Nullstellen kleiner gleich der Anzahl l der Polstellen.

3.5 Rechnen mit Übertragungsfunktionen

Man mag sich zunächst wundern, warum Systeme im Bildbereich beschrieben werden sollen, wenn die Beschreibung mit Hilfe von Zustandsmodellen im Zeitbereich umfassender ist, da diese das „Innere“ des Systems erfassen. Die Begründung liegt schlicht darin, dass manche praxisrelevanten Resultate der System- und Regelungstechnik durch Benutzung des Konzeptes der Übertragungsfunktion kompakt und anwenderfreundlich präsentiert werden können.

Dieser Vorteil wird bei der Untersuchung von Anordnungen, die durch eine *rückwirkungsfreie* Koppelung von zwei (linearen und zeitinvarianten) Systemen mit den Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{\mu_1(s)}{\nu_1(s)} \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{\mu_2(s)}{\nu_2(s)}$$

entstehen, einsichtig.

Hierzu betrachten wir drei Grundformen, nämlich die *Serien-*, die *Parallel-* bzw. die *rückgekoppelte Struktur* und bezeichnen die Übertragungsfunktion des neu entstandenen Gesamtsystems jeweils mit $G(s)$.

3.5.1 Serienstruktur

Bei der *Serienstruktur* (vgl. Abb. 3.1) ist die Eingangsgröße des zweiten Systems identisch mit der Ausgangsgröße des ersten Systems.

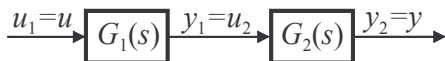


Abbildung 3.1: Serienstruktur

Damit ergibt sich $G(s)$ durch *Multiplikation* der einzelnen Übertragungsfunktionen zu

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

bzw. unter Benutzung der auftretenden Polynome

$$G(s) = \frac{\mu_1(s)\mu_2(s)}{\nu_1(s)\nu_2(s)}.$$

Man erkennt leicht, Pole bzw. Nullstellen von $G(s)$ sind *zwangsläufig* auch Pole bzw. Nullstellen von $G_1(s)$ oder von $G_2(s)$. Abgesehen von gekürzten Faktoren, d.h. falls gewisse Pole des einen Systems identisch sind mit Nullstellen des anderen, bleibt die Pol-Nullstellen-Konfiguration unverändert!

3.5.2 Parallelstruktur

Bei der *Parallelstruktur* (vgl. Abb. 3.2) entsteht die Ausgangsgröße der gesamten Anordnung durch Summation der Ausgangsgrößen der beiden Systeme.

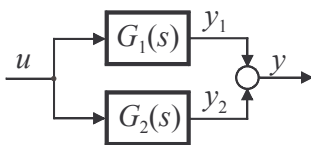


Abbildung 3.2: Parallelstruktur

Die Eingangsgröße ist bei beiden Systemen die gleiche. In Analogie ergibt sich die resultierende Übertragungsfunktion durch die *Summation* der zwei Übertragungsfunktionen zu

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

bzw. unter Verwendung der eingeführten Polynome zu

$$G(s) = \frac{\mu_1(s)\nu_2(s) + \mu_2(s)\nu_1(s)}{\nu_1(s)\nu_2(s)}.$$

Auch jetzt entsprechen allen Polen von $G(s)$ – abgesehen von gekürzten Polen – Pole von $G_1(s)$ oder von $G_2(s)$. Das bedeutet, dass auch durch diese Struktur kein Pol von $G(s)$ einen neuen Wert in der komplexen s -Ebene annehmen kann! Für die Nullstellen von $G(s)$ ergeben sich allerdings andere Werte, es sei denn, dass gewisse Nullstellen bei beiden (!) Systemen gleich sind.

3.5.3 Rückgekoppelte Struktur

Die *Rückkopplungsstruktur* (vgl. Abb. 3.3) spielt eine fundamentale Rolle beim Entwurf von Regelkreisen.

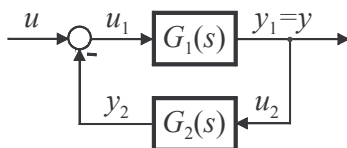


Abbildung 3.3: Rückgekoppelte Struktur

Nach einigen in der Abb. 3.3 unmittelbar nachvollziehbaren Umrechnungen erhalten wir für die gesuchte Übertragungsfunktion die Relation

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}.$$

Die (mühevoll und unübersichtliche) Beschreibung des Gesamtsystems in Zustandsform zeigt eindrucksvoll den Vorteil der Betrachtung im Bildbereich.

Beschreibt man nun $G(s)$ mit Hilfe der Zähler- bzw. Nennerpolynome der betrachteten Systeme, so ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift:

$$G(s) = \frac{\mu_1(s)\nu_2(s)}{\mu_1(s)\mu_2(s) + \nu_1(s)\nu_2(s)}.$$

Wesentlich ist hierbei die Erkenntnis, dass erst durch eine Rückkopplung das Nennerpolynom, d.h. die Lage der Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$, gezielt beeinflusst werden kann! Man braucht dazu nur die Übertragungsfunktion G_2 des zweiten Systems als freien Parameter zu betrachten.

In diesem Zusammenhang führt man die Übertragungsfunktion des *offenen Kreises* ein. Dieser entsteht durch ein fiktives „Auftrennen“ des Rückkopplungszweiges (vgl. Abb. 3.4).

Wir erhalten dadurch ein System mit der Übertragungsfunktion

$$L(s) = G_1(s)G_2(s). \quad (3.9)$$

Es wird sich später zeigen (vgl. Kap. 13), dass manche Wünsche an das Verhalten des Gesamtsystems (!) mit Hilfe von $L(s)$ einfach und prägnant formuliert werden können. Hierbei werden wir insbesondere den so genannten *Standardregelkreis* nach Abb. 3.5 betrachten.

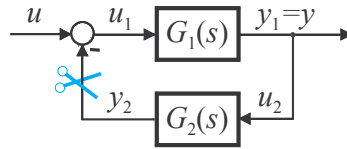


Abbildung 3.4: Aufgetrennte Rückkopplung

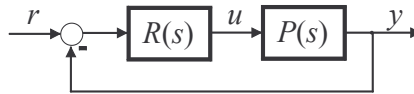


Abbildung 3.5: Standardregelkreis

Er entsteht durch Rückkopplung der Ausgangsgröße zweier in Serie geschalteter Systeme mit den Übertragungsfunktionen $R(s)$ und $P(s)$. Hierbei stellt $R(s)$ einen „freien Parameter“ dar, der geeignet gewählt werden soll, um dem entstandenen Gesamtsystem gewisse Eigenschaften zu verleihen. Letzteres besitzt die Übertragungsfunktion

$$T(s) := \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)}. \quad (3.10)$$

Durch Verwendung der Übertragungsfunktion des offenen Kreises mit der Abkürzung (3.9) erhalten wir aus (3.10)

$$T(s) := \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

3.5.4 Beispiele

Beispiel „RC-Netzwerk“ (Fortsetzung): Wir betrachten das in Kap. 1 entwickelte Modell und wählen für die Systemparameter τ_1 , τ_2 und ρ folgende Werte:

$$\tau_1 = \frac{1}{3}, \quad \tau_2 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir das „Zahlenmodell“

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ \frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} u.$$

Als Ausgangsgröße y betrachten wir nun die Spannung am Kondensator C_1 , d.h. die Zustandsvariable x_1 . Damit gilt

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Gesucht ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

Die Übertragungsfunktion lässt sich anhand der Beziehung (3.3) berechnen:

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+3 & -3 \\ -\frac{2}{3} & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Resolvente der Systemmatrix wurde in Kap. 2 bei der Berechnung der Transitionsmatrix ermittelt; sie lautet

$$\begin{pmatrix} s+3 & -3 \\ -\frac{2}{3} & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} & \frac{3}{(s+1)(s+4)} \\ \frac{\frac{2}{3}}{(s+1)(s+4)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} & \frac{3}{(s+1)(s+4)} \\ \frac{\frac{2}{3}}{(s+1)(s+4)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} & \frac{3}{(s+1)(s+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}.$$

Beispiel („linearer Oszillator“): Die Gewichtsfunktion des Oszillators nach (2.24) lautet für $\omega_0 = 1$

$$g(t) = \sin t$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion wird mit Hilfe der Relation (3.4) unter Berücksichtigung von $d = 0$ berechnet:

$$G(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (3.11)$$

Gesucht ist die so genannte *Sprungantwort* des Systems, das ist die Antwort $y(t)$ auf die konstante Eingangsgröße

$$u(t) = \sigma(t) := 1 \quad \text{für } t \geq 0, \quad (3.12)$$

wenn der Anfangszustand des Systems gleich null ist.

Es gilt im Bildbereich

$$y(s) = G(s)u(s)$$

bzw. mit (3.11), (3.12) und (2.36)

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{(s^2 + 1)s}.$$

Die Partialbruchzerlegung dieses Ausdrucks ergibt folgende Beiträge:

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \frac{1}{s} = \frac{k_1}{s+j} + \frac{k_2}{s-j} + \frac{k_3}{s}.$$

Die Konstanten³ k_1 , k_2 und k_3 ergeben sich aufgrund von

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{s^2+1} \frac{1}{s}(s+j) && \text{für } s = -j \\ k_2 &= \frac{1}{s^2+1} \frac{1}{s}(s-j) && \text{für } s = +j \\ k_3 &= \frac{1}{s^2+1} \frac{1}{s} && \text{für } s = 0, \end{aligned}$$

zu

$$k_1 = -0.5 \quad k_2 = -0.5 \quad k_3 = 1 .$$

Unter Beachtung der Relation (2.36) ergibt sich für die Sprungantwort

$$y(t) = -0.5e^{-jt} - 0.5e^{jt} + 1$$

bzw. in der üblichen reellen Schreibweise

$$y(t) = -\cos t + 1.$$

3.6 Eigenfunktionen

3.6.1 Einführung

Eigenfunktionen sind spezielle zeitliche Verläufe der Eingangsgröße $u(t)$ eines linearen und zeitinvarianten Systems der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du. \quad (3.13)$$

Sie ermöglichen eine anschauliche Interpretation der Begriffe *Übertragungsfunktion* und deren *Pol-* bzw. *Nullstellen*. Daraus resultiert auch eine Deutung des Begriffes *Frequenzgang*. Kennzeichnend für die nachfolgenden Ausführungen ist die Tatsache, dass ausschließlich Betrachtungen im Zeitbereich durchgeführt werden!

3.6.2 Besondere Eingangsgrößen (Eigenfunktionen)

Wir konzentrieren uns auf das obige Zustandsmodell mit u und y als skalare Eingangs- bzw. skalare Ausgangsgröße und dem n -dimensionalen Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$. Wir nehmen hierbei bewusst an, dass der Anfangszeitpunkt t_0 verschieden von null ist, und bezeichnen den Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ mit \mathbf{x}_0 . Wir wollen den Zustand $\mathbf{x}(t)$ bzw. die Ausgangsgröße $y(t)$ für eine spezielle Klasse von Eingangsgrößen:

$$u(t) = Ue^{\xi t} \quad (3.14)$$

ermitteln. Es ist bemerkenswert, dass die bei dem Bildungsgesetz der Eingangsgröße auftretenden (skalaren) Konstanten U und ξ komplexwertig (!) sein können. Dadurch beinhaltet

³ Man beachte, dass die Konstanten k_1 und k_2 konjugiert komplex sind!

die Klasse $u(t)$ eine Fülle praxisrelevanter Funktionen, wie „Konstanten“, „Exponentialfunktionen“ und insbesondere „harmonische Funktionen“, also Sinus- bzw. Cosinusverläufe!

Die gesuchte Lösung der Zustands-Differentialgleichung wird ausgedrückt durch zwei additiv zusammenhängende Anteile: die homogene Lösung $\mathbf{x}_{\text{hom}}(t)$ und die inhomogene Lösung $\mathbf{x}_{\text{inh}}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) + \mathbf{x}_{\text{inh}}(t).$$

Die homogene Lösung wird (vgl. Kap. 2) mit Hilfe der Transitionsmatrix dargestellt; sie lautet

$$\mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\eta},$$

wobei $\boldsymbol{\eta}$ ein konstanter Vektor ist.

Um die inhomogene Lösung zu ermitteln, gehen wir davon aus, dass sie die gleiche (!) zeitliche Abhängigkeit wie die Eingangsfunktion (3.14) aufweist. Daher machen wir einen Ansatz in der Form

$$\mathbf{x}_{\text{inh}}(t) = \boldsymbol{\gamma}e^{\xi t},$$

wobei $\boldsymbol{\gamma}$ ein konstanter, noch zu bestimmender Vektor ist. Hierzu setzt man obigen Ansatz in die zu erfüllende Differentialgleichung nach (3.13) ein und erhält

$$\xi\boldsymbol{\gamma}e^{\xi t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}e^{\xi t} + \mathbf{b}Ue^{\xi t}.$$

Nach Kürzung der Exponentialfunktion $e^{\xi t}$ und Sortierung der auftretenden Ausdrücke erhalten wir eine lineare Beziehung für den unbekanntem Vektor $\boldsymbol{\gamma}$:

$$(\xi\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b}U.$$

Falls die Matrix $(\xi\mathbf{E} - \mathbf{A})$ regulär ist, d.h. die Konstante ξ *keinen* Eigenwert der Matrix \mathbf{A} darstellt, wird der Vektor $\boldsymbol{\gamma}$ durch

$$\boldsymbol{\gamma} = (\xi\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U$$

festgelegt und wir erhalten damit die inhomogene Lösung

$$\mathbf{x}_{\text{inh}}(t) = (\xi\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}Ue^{\xi t}.$$

Man erkennt, diese Lösung entsteht durch Multiplikation der Eingangsfunktion $Ue^{\xi t}$ mit einer durch das Datenpaar $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ bedingten Konstanten. Das zeitliche Verhalten der Vektors \mathbf{x}_{inh} wird geprägt durch die Funktion $e^{\xi t}$.

Hinweis

Es wird an dieser Stelle ausdrücklich festgehalten: Eine partikuläre Lösung existiert und kann auch berechnet werden, wenn die Konstante ξ *gleich* einem Eigenwert ist! Sie besitzt aber nicht obige einfache und prägnante Form (siehe Beispiel „linearer Oszillator“ in Kap. 6)!

Die Gesamtlösung bekommen wir durch Superposition der einzelnen Lösungen $\mathbf{x}_{\text{hom}}(t)$ und $\mathbf{x}_{\text{inh}}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\eta} + (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t}. \quad (3.15)$$

Die Ausgangsgröße $y(t)$ errechnet sich damit in einfacher Weise zu

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\eta} + [\mathbf{c}^T (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] U e^{\xi t}. \quad (3.16)$$

Es soll nun auf die Struktur der abgeleiteten Beziehungen eingegangen werden. Der Zustand $\mathbf{x}(t)$ nach Gleichung (3.15) bzw. die Ausgangsgröße $y(t)$ nach Gleichung (3.16) enthalten jeweils zwei additiv zusammenhängende Anteile, die das zeitliche Verhalten prägen. Der erste Anteil wird durch die Transitionsmatrix, also durch die Eigendynamik des Systems festgelegt. Das Verhalten des zweiten Terms wird durch die spezielle Eingangsfunktion $U e^{\xi t}$ gestaltet. Man nennt diese besondere Eingangsfunktion, die sich in jeder Zustandsvariablen „reproduziert“, eine *Eigenfunktion* des Systems.

Einfluss des Anfangszustands \mathbf{x}_0

Der konstante Vektor $\boldsymbol{\eta}$ kann aufgrund des vorgegebenen Wertes \mathbf{x}_0 für den Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ mit Hilfe der Gleichung (3.15) festgelegt werden:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}t_0} \boldsymbol{\eta} + (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t_0}.$$

Er ergibt sich unmittelbar zu

$$\boldsymbol{\eta} = e^{-\mathbf{A}t_0} [\mathbf{x}_0 - (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t_0}]. \quad (3.17)$$

Damit erhalten wir unter Verwendung von (3.15) und (3.16) folgende Beziehungen für den Zustandsvektor bzw. die Ausgangsgröße :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} [\mathbf{x}_0 - (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t_0}] + (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t} \quad (3.18)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-t_0)} [\mathbf{x}_0 - (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t_0}] + [\mathbf{c}^T (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] U e^{\xi t} \quad (3.19)$$

3.6.3 Interpretation der Übertragungsfunktion

Höchst bemerkenswert ist, dass in der Relation (3.16) für die Ausgangsgröße der Faktor $[\mathbf{c}^T (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d]$, mit dem die Eigenfunktion multipliziert wird, dem Wert der Übertragungsfunktion des Systems (3.13)

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d$$

an der Stelle $s = \xi$ gleich ist! Die Ausgangsgröße kann damit in folgender prägnanter Form angegeben werden:

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\eta} + G(\xi) U e^{\xi t}. \quad (3.20)$$

Weiters ist zu beachten, dass es *immer* möglich ist, einen Anfangszustand \mathbf{x}_0 so anzugeben, dass die Konstante $\boldsymbol{\eta}$ gleich null wird. Man braucht nur in Gleichung (3.17) als Anfangszustand den Wert

$$\mathbf{x}_0 = (\xi \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{\xi t_0} \quad (3.21)$$

zu wählen. Dann ergibt sich die Ausgangsgröße zu

$$y(t) = G(\xi) U e^{\xi t}.$$

Das bedeutet allerdings: Für Eingangsgrößen der Form $U e^{\xi t}$ (und nur für diese!) entspricht die Übertragungsfunktion $G(\xi)$ dem „Quotienten von Ausgangs- zu Eingangsgröße“ im Zeitbereich (!). Dies ermöglicht eine physikalische Interpretation des Begriffes *Übertragungsfunktion*, der für *beliebige* Eingangsgrößen $u(t)$ als „Quotient von Ausgangs- zu Eingangsgröße“ im Bildbereich (!) eingeführt wurde.

3.6.4 Nullstellen der Übertragungsfunktion

Wir erarbeiten nun eine Deutung für den Begriff *Nullstellen* der Übertragungsfunktion $G(s)$. Zur Erinnerung: es sind diejenigen (komplexen, endlichen) Werte β , bei denen $G(s)$ den Wert null annimmt. Das hat wiederum zur Folge: Wenn als besondere Eingangsgröße die Eigenfunktion

$$u(t) = e^{\beta t}, \quad \text{d.h. } U = 1 \text{ und } \xi = \beta,$$

gewählt wird, ergibt sich die Ausgangsgröße mit Hilfe der Beziehung (3.20):

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\eta} + G(\beta) e^{\beta t}.$$

Da definitionsgemäß $G(s = \beta) = 0$ gilt, vereinfacht sich die Form der Ausgangsgröße zu

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\eta}.$$

Mit anderen Worten: Das Zeitverhalten der Ausgangsgröße ist *unabhängig* von dem der gewählten Eingangsgröße und wird *ausschließlich* durch die Transitionsmatrix geprägt. Wählt man insbesondere gemäß Gleichung (3.17) den speziellen Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = (\beta \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} e^{\beta t_0},$$

so ist die Ausgangsgröße des Systems für *alle* Werte des Zeitparameters t *identisch* null, obwohl das System mit einer nichttrivialen Eingangsgröße erregt wird!

3.6.5 Polstellen der Übertragungsfunktion

Durch Betrachtung eines so genannten dualen Experiments können wir den Polen der Übertragungsfunktion eine Deutung geben. Hierbei wählen wir die Eingangsgröße $u(t)$ identisch null. Es liegt also ein freies System vor! Die Ausgangsgröße lautet dann

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0.$$

Wir wählen jetzt einen Anfangszustand \mathbf{x}_0 auf einer Eigenrichtung des Systems, d.h. dieser Anfangszustand entspricht einem Rechts-Eigenvektor zu einem Eigenwert λ der Systemmatrix \mathbf{A} . Damit ist die zugehörige Lösung (vgl. Kap. 2)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t},$$

und die Ausgangsgröße nimmt die Gestalt

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 e^{\lambda(t-t_0)} = Y e^{\lambda t}$$

an. Das bedeutet, falls bei verschwindender Eingangsgröße die Ausgangsgröße einen durch die Funktion $Y e^{\lambda t}$ exponentiell beschriebenen Verlauf zeigt, entspricht die Konstante λ einem Pol der Übertragungsfunktion!

3.6.6 Frequenzgang

Üblicherweise wird der Begriff *Frequenzgang* mathematisch abstrakt als die Übertragungsfunktion $G(s)$ auf der imaginären Achse, d.h. $G(s = j\omega)$, eingeführt. Wir wollen hier eine physikalische Deutung dieses Begriffes erarbeiten und betrachten ein (lineares und zeitinvariantes) Übertragungssystem, wobei wir voraussetzen, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} einen negativen Realteil besitzen. Als Eingangsgröße verwenden wir die Eigenfunktion

$$u(t) = U e^{j\Omega t}, \quad \text{d.h. } \xi = j\Omega.$$

Es werden harmonische Schwingungen der *festen* Frequenz $\omega = \Omega$ und der Amplitude U betrachtet. Die Größen Ω und U sind reelle Konstanten. Wir interessieren uns für das Systemverhalten im *eingeschwungenen* Zustand.

Hierzu wählen wir den Anfangszeitpunkt $t_0 \rightarrow -\infty$ und ermitteln die Werte des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ zu einem (endlichen) Wert des Zeitparameters t . Aufgrund der Lage aller Eigenwerte s_i der Systemmatrix erfolgt ein Abklingen aller auftretenden Exponentialfunktionen $e^{s_i(t-t_0)}$ und zwangsläufig auch der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$. Damit wird das stationäre Systemverhalten gemäß (3.18) und (3.19) durch

$$\mathbf{x}(t) = (j\Omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U e^{j\Omega t} \quad \text{und} \quad y(t) = G(j\Omega) U e^{j\Omega t}$$

beschrieben.

Man *setzt* nun *voraus*: Die Übertragungsfunktion $G(s)$ ist eine gebrochen rationale Funktion in s mit reellen (!) Koeffizienten. Letzteres hat zur Folge, dass die Zahlen $G(j\Omega)$ und $G(-j\Omega)$ konjugiert komplex sind. Die stationäre Antwort $y(t)$ auf die reelle Eingangsfunktion

$$u(t) = U \cos(\Omega t) = \text{Re} \{ U e^{j\Omega t} \},$$

d.h. auf eine harmonische Schwingung der Frequenz Ω , ergibt sich mit Hilfe der abgeleiteten Relation zu

$$y(t) = \text{Re} \{ G(j\Omega) U e^{j\Omega t} \}.$$

Durch Benutzung der üblichen Schreibweise erhalten wir letztlich

$$y(t) = |G(j\Omega)| U \cos(\Omega t + \varphi), \quad (3.22)$$

wobei mit φ der Winkel der komplexen Zahl $G(j\Omega)$ bezeichnet wurde. Also: im stationären Zustand ist die Ausgangsgröße eine harmonische Schwingung mit der *gleichen* Frequenz wie die Eingangsschwingung. Ihre Amplitude beträgt $|G(j\Omega)| U$, deren Phasenverschiebung bezüglich der Eingangsfunktion ist gleich

$$\varphi = \text{arc} \{G(j\Omega)\}. \quad (3.23)$$

Genau auf dieser Erkenntnis beruht die *prinzipielle* Vorgehensweise zur *messtechnischen* Erfassung des Frequenzganges. Man schaltet eine harmonische Schwingung einer bestimmten Amplitude und Frequenz auf ein System und wartet auf das Abklingen der Einschwingvorgänge. Im Anschluss daran werden die Amplitude der Ausgangsschwingung und deren Phasenverschiebung gegen die Eingangsschwingung gemessen. Dieses wird für verschiedene Frequenzwerte wiederholt. (Die Realisierung dieses Konzeptes in der Praxis gestaltet sich allerdings komplizierter.) Das Resultat ist die quantitative Erfassung des Systemverhaltens entweder als Tabelle mit Werten für den Betrag und den Winkel des Frequenzgangs $G(j\omega)$ oder als Ortskurve $G(j\omega)$ in der komplexen Ebene.

3.6.7 Beispiele

Beispiel: Wir betrachten ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

und wählen bei verschwindendem Anfangszustand folgende harmonische Eingangsgröße:

$$u(t) = \sin \omega_0 t \quad \text{mit } \omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}.$$

Gesucht ist der Zeitverlauf $y(t)$ für $t \geq 0$.

Wir ermitteln den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ mit Hilfe der *Laplace-Transformation*. Es gilt allgemein:

$$y(s) = G(s)u(s).$$

Die *Laplace-Transformierte* der Eingangsgröße lautet:

$$u(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Damit ergibt sich für *Laplace-Transformierte* die Ausgangsgröße

$$y(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+1}.$$

Eine Partialbruchzerlegung ergibt den Ausdruck:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1-s}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} \right). \end{aligned}$$

Die Rücktransformation liefert die gesuchte Ausgangsgröße

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Man erkennt, dass im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Letzteres Ergebnis können wir mit Hilfe des Frequenzganges erhalten. Im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$y(t) = |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \text{arc}\{G(j\omega_0)\}).$$

Durch einfaches Einsetzen erhält man unmittelbar aus der komplexen Zahl

$$G(j1) = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

die Amplitude und die Phasenverschiebung der Ausgangsgröße:

$$|G(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \text{arc}\{G(j1)\} = -\frac{\pi}{4}.$$

Beispiel („RC-Netzwerk“, Fortsetzung): Auf das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die harmonische Eingangsgröße

$$u(t) = \sin \omega_0 t$$

aufgeschaltet. Hierbei beträgt $\omega_0 = 1 \text{ rads}^{-1}$. Gesucht wird der Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand. Mit Hilfe von (3.22) und (3.23) ergibt sich:

$$y(t) = |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \text{arc}\{G(j\omega_0)\}).$$

Im vorliegenden Fall gilt unter der Annahme $\omega_0 = 1 \text{ rads}^{-1}$

$$|G(j1)| = \frac{4}{\sqrt{34}} \quad \text{und} \quad \text{arc}\{G(j1)\} = -59^\circ.$$

Obige Werte können mit Hilfe der in Abb. 3.6 dargestellten *Bode*-Diagramme verifiziert werden.⁴ Aus Abb. 3.7 ist der Verlauf der Ausgangsgröße für Werte $t \geq 0$ ersichtlich. Man erkennt, dass sich nach Abklingen des Einschwingvorganges obiger harmonischer Verlauf einstellt.

⁴ Hierbei ist zu beachten, dass der Betrag von $G(j\omega)$ in dB angegeben wird, d.h.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|.$$

Siehe auch Kap. 16.

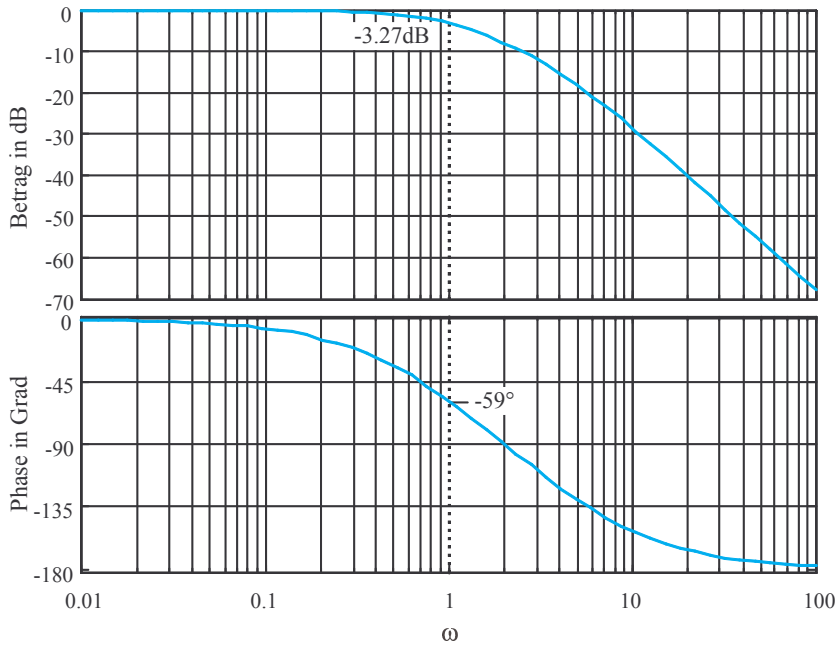


Abbildung 3.6: Bode-Diagramme zu $G(s)$

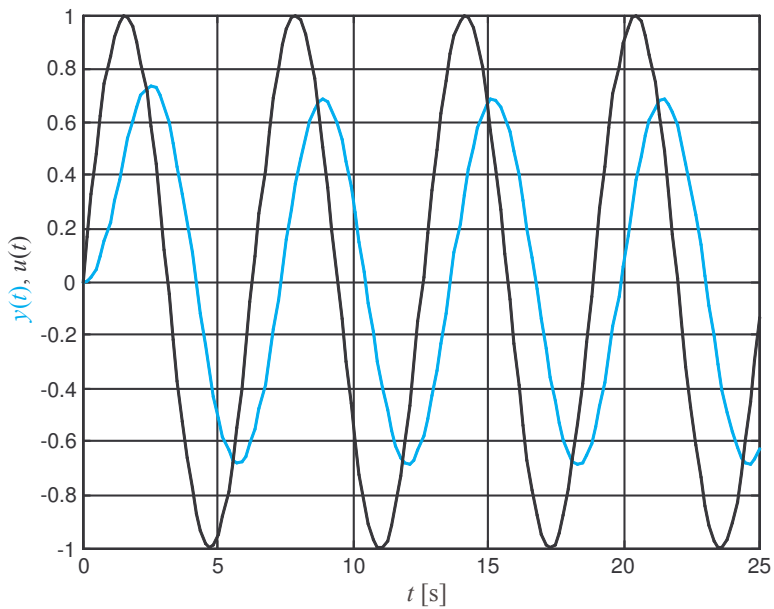


Abbildung 3.7: Verläufe von Eingangs- und Ausgangsspannung